Краткие сообщения ОИЯИ № 1(58)-93 *JINR Rapid Communications № 1(58)-93*
УДК 539.171

ВОЗБУЖДЕНИЕ ДЫХАТЕЛЬНОЙ МОДЫ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ

С.И.Федотов

Получено аналитическое выражение дифференциального сечения рассеяния для нерелятивистских тяжелых ионов с возбуждением гигантского монопольного резонанса. Рассмотрение ведется на базе фейнмановских интегралов по путям. Гигантский монопольный резонанс рассматривается в квантовом гидродинамическом приближении.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Breathing Mode Excitation in Heavy Ion Collisions

S.I.Fedotov

An analytical expression is derived for a differential scattering cross section of a giant monopole resonance. The consideration is based on Feynman's path integrals. The giant monopole resonance is treated in the quantum hydrodynamic approximation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Изоскалярный гигантский монопольный резонанс, называемый дыхательной модой, представляет значительный интерес, в частности, в связи с тем, что он имеет прямое отношение к сжимаемости ядра и, следовательно, к сжимаемости ядерной материи.

В данной работе для расчета дифференциального сечения возбуждения монопольного резонанса в реакциях с тяжелыми ионами используется метод, описанный в [1].

Столкновение иона с ядром опишем гамильтонианом, выделив только одну фононную моду колебания плотности ядерной материи:

$$H = H_1 + H_2 + H_{12}. \tag{1}$$

$H_1 = \frac{1}{2}\mu \dot{\mathrm{r}}^2 + U_0(\mathrm{r})$ описывает относительное движение иона и ядра, $H_2 = h\omega_{nl}\left(b^+_{nlm} b_{nlm} + 1/2\right)$ — мультипольные колебания плотности ядерного вещества, $H_{12} = \gamma_{nlm}(\mathbf{r})\, b^+_{nlm} + \bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r})\, b_{nlm}$— взаимодействие орбитального движения с внутренними колебаниями ядра. Рассматриваем только ядерное взаимодействие.

Для получения слагаемых гамильтониана, описывающих мультипольные колебания плотности ядерного вещества, запишем гамильтониан системы нуклонов ядра с учетом двухчастичного взаимодействия $v_{12}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'|)$ в представлении вторичного квантования через операторы поля в виде:

$$H_2 = \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \Psi^+ (\mathbf{r}_2) \cdot \nabla \Psi (\mathbf{r}_2)\, d\mathbf{r}_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \Psi^+ (\mathbf{r}_2)\, \Psi^+ (\mathbf{r}_2')\, v_{12}\left(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'|\right) \Psi (\mathbf{r}_2)\, \Psi (\mathbf{r}_2')\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_2'. \qquad (2)$$

Перейдем к операторам плотности $\rho(\mathbf{r}_2)$ и тока $j(\mathbf{r}_2)$ [2]:

$$\rho(\mathbf{r}_2) = \Psi^+ (\mathbf{r}_2)\; \Psi (\mathbf{r}_2) = \rho_0 (\mathbf{r}_2) + \delta\rho (\mathbf{r}_2)$$

$$j(\mathbf{r}_2) = \frac{-i\hbar}{2m} \left(\Psi^+ (\mathbf{r}_2) \cdot \nabla \Psi (\mathbf{r}_2) - \nabla \Psi^+ (\mathbf{r}_2) \cdot \Psi (\mathbf{r}_2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\rho \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi \cdot \rho\right), \qquad (3)$$

где $\rho_0(\mathbf{r}_2)$ — средняя плотность ядра, $\delta\rho(\mathbf{r}_2)$ — отклонение плотности от равновесного значения, φ — потенциал скорости (предполагается безвихревое движение). Оставаясь в рамках гармонического приближения, т.е. пренебрегая членами по $\delta\rho$ и φ выше второго порядка и считая, что ядро имеет жесткий край, перепишем гамильтониан в виде:

$$H_2 = \frac{m\rho_0}{2} \int \left(\nabla \varphi (\mathbf{r}_2)\right)^2 d\mathbf{r}_2 + \frac{\hbar^2}{8m\rho_0} \int \left(\nabla \delta\rho (\mathbf{r}_2)\right)^2 d\mathbf{r}_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int v_{12} \left(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'|\right)\; \delta\rho (\mathbf{r}_2)\; \delta\rho (\mathbf{r}_2')\; d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_2'. \qquad (4)$$

Мы интересуемся собственными колебаниями плотности. Флуктуация плотности $\delta\rho(\mathbf{r}_2)$ в приближении $v_{12}\left(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'|\right) = g_0 \delta\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'\right)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 \delta\rho(\mathbf{r}_2)}{\partial t^2} = \left(\frac{g_0\rho_0}{m}\Delta - \frac{\hbar^2}{4m^2}\Delta^2\right)\delta\rho(\mathbf{r}_2) \equiv L\delta\rho(\mathbf{r}_2) \tag{5}$$

с граничным условием $\mathbf{n}\cdot\delta\rho(\mathbf{r}_2)|_{r=R_0} = 0$, где $\mathbf{n}$ — вектор, нормальный поверхности ядра.

Решение этого уравнения ищем в виде $\delta\rho(\mathbf{r}_2, t) = \delta\rho(\mathbf{r}_2)\,e^{-i\omega t}$. Ограничиваясь недиспергирующими нормальными колебаниями, получим для них хорошо известное уравнение Гамильтона:

$$\Delta\delta\rho(\mathbf{r}_2) + k^2\delta\rho(\mathbf{r}_2) = 0, \quad k^2 = \frac{m}{g_0\rho_0}\omega^2. \tag{6}$$

Общее решение этого уравнения дается выражением:

$$\delta\rho(\mathbf{r}_2) = \sum_{nlm}\delta\rho_{nlm}\, j_l(k_{nl}r_2)\; Y_{lm}(\theta\varphi)\,. \tag{7}$$

Введем операторы рождения b^+_{nlm} и уничтожения b_{nlm} фононов, выбрав множители в формуле таким образом, чтобы придать гамильтониану диагональный вид:

$$\delta\rho_{nlm} = \left(\frac{\hbar\rho_0 k^2_{nl}}{2m\,N_{nl}\,\omega_{nl}}\right)^{1/2}\left(b^+_{nlm} + (-)^m\, b_{n\,l-m}\right) \tag{8}$$

$$H_2 = h\,\omega_{nl}\left(b^+_{nlm}\; b_{nlm} + \frac{1}{2}\right), \tag{9}$$

где нормировочная константа $N_{nl} = \int\limits_0^{R_0} r_2^2\,d\,\mathbf{r}_2\; j_l^2(k_{nl}r)$.

Потенциальную энергию ядерного взаимодействия иона с ядром получим процедурой усреднения эффективного нуклон-нуклонного взаимодействия по плотностям сталкивающихся иона и ядра. Учтем только возбуждение ядра-мишени. Возьмем силы в виде, принятом в теории конечных ферми-систем [3]:

$$v_{12}\left(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'\right) = f_{in}\left(\frac{d\rho_0}{d\,\varepsilon_F}\right)^{-1}\delta\left(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'\right),$$

где f_{in} — константа эффективного взаимодействия нуклонов в ядре, а $\frac{d\rho_0}{d\varepsilon_F}$ — производная по энергии Ферми.

Тогда, учитывая (7) и (8), получим следующее выражение для H_{12}

$$H_{12} = \gamma_{nlm}(\mathbf{r})\, b^{+}_{nlm} + \bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r})\, b_{nlm}\,, \tag{10}$$

где

$$\gamma_{nlm}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_0 f_{in} \left(\frac{d\rho_0}{d\varepsilon_F}\right)^{-1} \sqrt{\frac{\hbar\rho_0 k^2_{nl}}{2m N_{nl}\omega_{nl}}} \times$$

$$\times j_l\left(k_{nl} r\right) Y^{+}_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \int\limits_0^{R_0} j_0(kr)\, r^2 d\,\mathbf{r}.$$

Волновую функцию системы запишем, используя пропагатор системы $K(\mathbf{r}_f n_f t_f | \mathbf{r}_i n_i t_i) = \langle \mathbf{r}_f n_f t_f | \mathbf{r}_i n_i t_i \rangle$ [1]:

$$\Psi\left(\mathbf{r}_f n_f t_f\right) = \sum_{n_i} \int \langle \mathbf{r}_f n_f t_f \mid \mathbf{r}_i n_i t_i \rangle\, \Psi\left(\mathbf{r}_i n_i t_i\right) d\,\mathbf{r}_i\,, \tag{11}$$

где введены в тензорном пространстве состояний системы базисные векторы $|\mathbf{r}\, n\rangle = |\mathbf{r}\rangle\, |n\rangle$ и $\langle \mathbf{r}\, n | \mathbf{r}'\, n' \rangle = \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right)\delta_{nn'}$, причем $|\,\mathbf{r}\,\rangle$ — собственные векторы оператора координаты относительного движения $\mathbf{r}(t)$, а $|\,n\,\rangle$ — собственные векторы оператора числа фононов. Освобождаясь от фононных амплитуд b^+, b, как это было сделано в [1], получим для волновой функции следующее выражение:

$$\Psi^{+}_{n_f n_i}\left(\mathbf{r}_f t_f\right) = \int\limits_{t_i \to -\infty} K_{n_f n_i}\, e^{i/\hbar\,(\mathbf{p}\mathbf{r}_i - E_i t)}\, d\,\mathbf{r}_i\,, \tag{12}$$

где учтено, что начальное состояние системы, определенное функцией $e^{i/\hbar\,(\mathbf{p}\mathbf{r}_i - E_i t)}$, соответствует относительному движению иона и ядра, а $K_{n_f n_i}$ — квазиклассический пропагатор — имеет вид:

$$K_{n_f n_i} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar i}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{|\,d\,\mathbf{r}_f / \partial\,\mathbf{r}_i\,|}} \times$$

$$\times\, e^{\left(i/\hbar\, S_\alpha - \frac{1}{2}\nu\pi i\right)}\; T_{n_f n_i}\left[\mathbf{r}_\alpha\right]. \tag{13}$$

Суммирование ведется по всем классическим траекториям, приводящим к одному и тому же углу рассеяния, S_α — действие вдоль такой траектории, $T_{n_f n_i}$ — амплитуда вероятности перехода $n_i \to n_f$, зависящая от траектории:

$$T_{n_f n_i} = \left[\frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t_f} \gamma_{nlm}(\mathbf{r}_\alpha)\, e^{i\omega(t-t_f)}\, dt\right]^{n_f} \frac{1}{\sqrt{n_f!}} \times$$

$$\times\ e^{-\frac{1}{\hbar^2}\int_{t_i}^{t_f} ds \int_{t_i}^{s} \bar{\gamma}(\mathbf{r}_\alpha(s))\,\gamma(\mathbf{r}_\alpha(t))\, e^{-i\omega(t-s)} dt} \qquad (14)$$

Асимптотическое выражение для волновой функции выглядит следующим образом:

$$\Psi^+_{n_f n_i} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} + \sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{кл} \frac{k_i}{k_f}}\; T_{n_f n_i}\, e^{i\chi}\, \frac{e^{ikr}}{r}\ , \qquad (15)$$

где k_i и k_f — начальные и конечные волновые векторы, χ — вещественная функция, вид которой для дальнейшего не важен. Отсюда получаем выражение для дифференциального сечения рассеяния в первом порядке квазиклассического приближения для континуального интеграла:

$$\frac{d\sigma_{n_i \to n_f}}{d\Omega} = \sum_\alpha \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{кл} \left| T_{n_i n_f}\left[\mathbf{r}_\alpha\right] \right|^2, \qquad (16)$$

где $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{кл}$ — дифференциальное сечение классического движения вдоль траектории $\mathbf{r}_\alpha(t)$. $T_{n_f n_i}$ — соответствующая квантовая амплитуда вдоль того же пути.

Получим выражение для дифференциального сечения, предполагая, что движение происходит по гиперболической траектории. Тогда для дифференциального классического сечения получим формулу Резерфорда:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{кл} = \frac{1}{4}\left(\frac{z_1 z_2 e^2}{\mu v^2}\right)^2 \sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right). \qquad (17)$$

Для вероятности ядерного перехода $\left|T_{n_f n_i}\right|^2$, в случае возбуждения одной моды фононного состояния:

$$\left|T_{n_f n_i}\right|^2 = \frac{|f_{nl}(\omega, t)|^{2n_f}}{n_f!}\, e^{-\left|f_{nl}(\omega, t)\right|^2}, \tag{18}$$

где $f_{nl}\left(\omega, t\right) = \frac{1}{i\hbar} \int\limits_{t_i}^{t_f} \gamma_{nlm}(\mathrm{r})\, e^{i\omega(t - t_f)}\, dt.$

Используя параметрическое уравнение гиперболы

$$r = a\left(\varepsilon\, ch\, w + 1\right),\; t = \frac{a}{v}\left(\varepsilon\, sh\, w + w\right),$$

получим для $f_{nl}(\omega, t)$ при $l = m = 0$

$$f_{00} = \frac{4\pi\rho_0}{k\hbar v} f_{in} \left(\frac{d\rho_0}{d\varepsilon_F}\right)^{-1} \sqrt{\frac{\hbar\rho_0 k_{nl}^2}{2m N_{nl}\omega_{nl}}} \int\limits_0^{R_0} j_0(kr)\, r^2\, dr \times$$

$$\times \left\{ e^{ika} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, sh\, w - \beta\, ch\, w - i\xi w}\, dw - e^{-ika} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, sh\, w - \beta\, ch\, w + i\xi w}\, dw \right\}, \tag{19}$$

где

$$\varepsilon = \sin^{-1}\frac{\theta}{2};\; \xi = \frac{a\omega}{v};\; \omega = k c_s;\; \alpha = k a \varepsilon;\; \beta = \frac{a\omega}{v}\varepsilon = \xi\varepsilon.$$

Интегралы выражаются через функции Бесселя и

$$f_{00} = \frac{4\pi^2\rho_0}{\sqrt{\pi}\, v} \sqrt{\frac{\hbar\rho_0}{2m N_{nl}\omega_{nl}}} \int\limits_0^{R_0} j_0(kr)\, r^2\, dr$$

$$f_{in}\left(\frac{d\rho}{d\varepsilon_F}\right)^{-1} \frac{\sin\left(k a - \frac{\xi}{2}\ln\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)}{sh\left(\xi\pi\right)} \cdot \left(J_{-i\xi} - J_{i\xi}\right).$$

Подставив рассчитанные значения f_{00} в (18) и (16), получим формулу для дифференциального сечения возбуждения изоскалярного гигантского монопольного резонанса, выраженную через хорошо известные функции.

Литература

1. Федотов С.И. — В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, настоящий сборник, с.65.
2. Kobe D.H., Coomer G.C. — Phys. Rev., 1979, A7, p.1312.
3. Мигдал А.Б. — Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, 1965.

Рукопись поступила 28 октября 1992 года.